

# SOLUCION NUMERICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS.

El objetivo de estas notas complementarias al tema de solución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias es dar una introducción simple al tema, basada en principios de cálculo. Antes de entrar al tema en términos más generales, este enfoque permite establecer los métodos más simples del tipo de *un paso* o de *paso simple*. Posteriormente la desarrollar los métodos Runge-Kutta, será indispensable otro enfoque del tema, basado en la serie de Taylor.

El objetivo en este tema es resolver la ecuación diferencial ordinaria de primer orden

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t) \quad (1)$$

Sujeta a la condición inicial  $y(0) = Y_0$ . El problema de condiciones de frontera no será tratado en este curso de introducción al tema, dado que su carácter es más complejo, pero de cualquier manera los conceptos aprendidos en este curso de introducción serán la base de estudios más avanzados donde se cubren dichos temas.

Por otro lado es importante recalcar que aunque el planteamiento se refiere a ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, se puede resolver cualquier ecuación de diferencial ordinaria de más alto orden convirtiéndola en un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, en número igual al orden de la ecuación diferencial ordinaria original.

Regresando al planteamiento de la solución numérica de la ecuación diferencial ordinaria (EDO), es importante comentar que dicha solución, obviamente, consistirá de una colección de puntos, que representarán aproximaciones de la solución real o verdadera, la cual no conocemos por supuesto. Esto significa que lo que obtendremos es una representación finita y aproximada de la curva solución verdadera  $y(t)$ . El punto de inicio será por supuesto la condición inicial  $y(0) = Y_0$ .

Tomemos la ecuación (1) y empecemos por escribirla de la forma

$$dy = f(y, t) dt$$

Si integramos esta última ecuación entre los valores de  $t_k$  y  $t_{k+1}$ , partiendo de que estamos en el paso  $k+1$  del proceso recursivo, y por tanto conocemos el valor de  $y(t_k)$

que denotaremos por simplicidad como  $y_k$ , entonces obtenemos el valor de  $y(k+1)$  que denotaremos como  $y_{k+1}$ , como se muestra continuación.

$$\int_{y^{(k)}}^{y^{(k+1)}} dy = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(y,t) dt$$

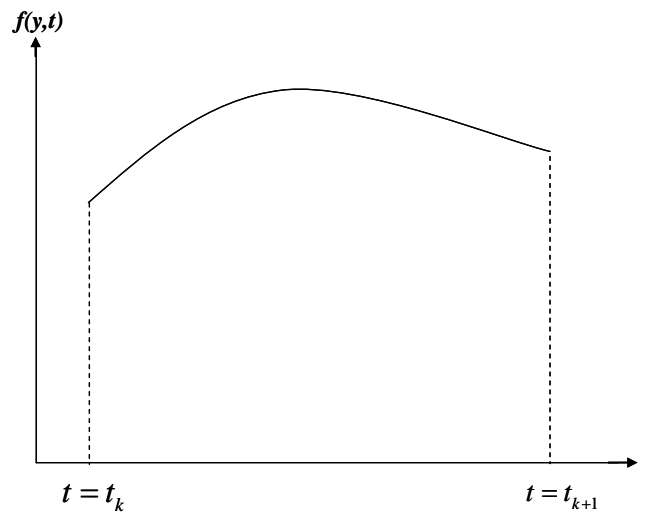
Lo cual resulta

$$y_{k+1} - y_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(y,t) dt$$

De donde obtenemos finalmente

$$y_{k+1} = y_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(y,t) dt \quad (2)$$

Esta última ecuación es la base para obtener los métodos de paso simple que obtendremos. Su obtención depende de la solución numérica, por supuesto, de la integral del lado derecho de (2).



***Integral de la función  $f(y,t)$  en intervalo***

Podemos aproximar dicha integral a través de la aproximación lineal de la curva  $f(y,t)$ , para lo cual existen tres opciones.

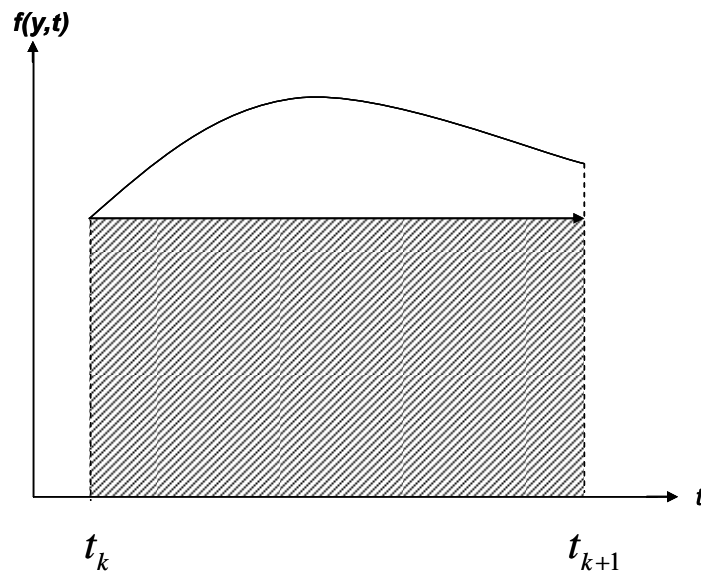
1. Aproximación por recta constante e igual a la ordenada en el punto  $t_k$ , es decir

$f(y_k, t_k) = f_k$ , por lo que la integral  $\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(y, t) dt$ , que representa como

sabemos el área bajo la curva  $f(y, t)$ , comprendida entre las rectas  $t_k$  y  $t_{k+1}$ , se aproxima por el área del rectángulo de área igual a

$$f_k (t_{k+1} - t_k)$$

Lo anterior se muestra en la figura siguiente.



*Aproximación numérica de la integral.  
Método de Euler explícito*

Si definimos la diferencia  $(t_{k+1} - t_k)$  como  $h$ , que es el paso de integración, entonces obtenemos la ecuación recursiva del método presente como

$$y_{k+1} = y_k + hf_k \quad (3)$$

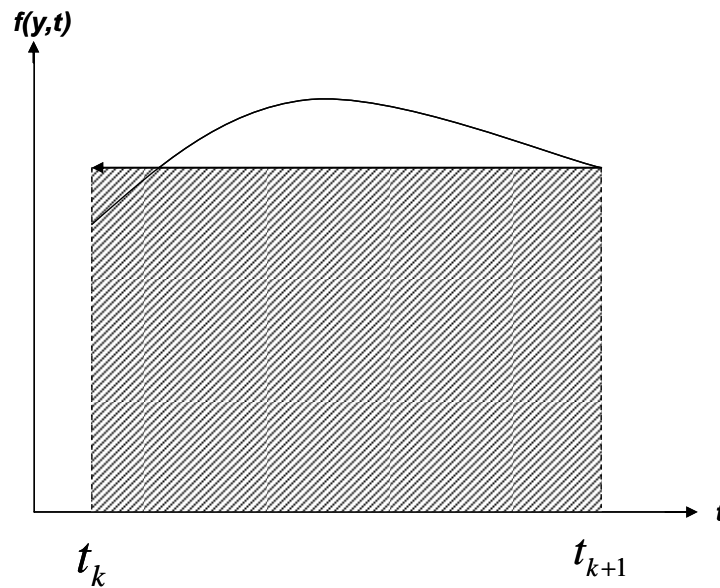
La ecuación anterior es la fórmula recursiva del método denominado de *Euler hacia adelante* o *Euler explícito*.

2. Aproximación por recta constante e igual a la ordenada en el punto  $t_{k+1}$ , es decir,

$f(y_{k+1}, t_{k+1}) = f_{k+1}$ , por lo que la integral  $\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(y, t) dt$ , que representa como sabemos el área bajo la curva  $f(y, t)$ , comprendida entre las rectas  $t_k$  y  $t_{k+1}$ , se aproxima por el área del rectángulo de área igual a

$$f_{k+1} (t_{k+1} - t_k).$$

Esto se muestra en la figura a continuación.



***Aproximación numérica de la integral.  
Método de Euler implícito.***

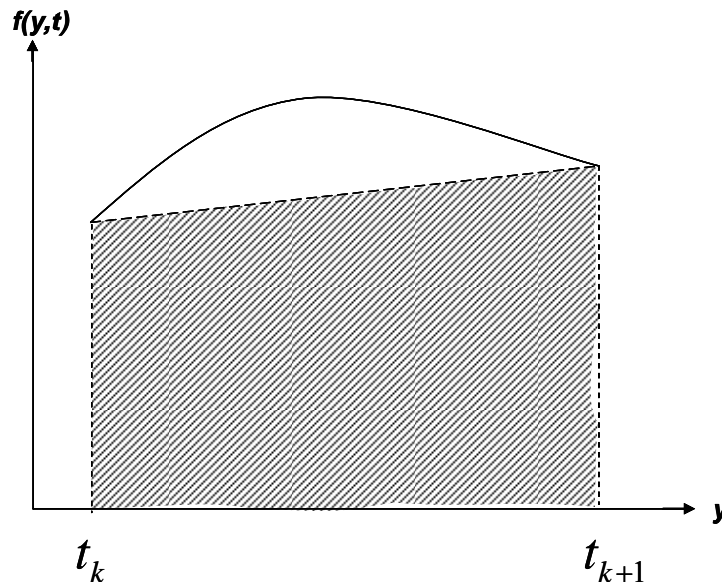
Por lo que sustituyendo en la ecuación (2) obtenemos la fórmula recursiva

$$y_{k+1} = y_k + h f_{k+1} \quad (4)$$

La fórmula anterior se conoce como la fórmula recursiva del método de *Euler hacia atrás* o *Euler implícito*.

El nombre de los dos últimos métodos hace evidente que las ecuaciones recursivas que los definen, son del tipo explícitas, en el primer caso, e implícitas en el segundo. Lo anterior indica que en el primero  $y_{k+1}$  está en función de  $t_k$  y  $y_k$ , mientras que en el segundo está en función de  $t_{k+1}$  y  $y_{k+1}$ . Si la función del integrando es lineal, la ecuación recursiva del *Euler implícito* se puede escribir de forma explícita y por tanto el método será de paso simple, de lo contrario habría que desarrollar otro procedimiento del tipo denominado *predictor-corrector*.

3. El tercer caso corresponde a la aproximación numérica de la integral, por medio de la regla trapezoidal, es decir, aproximando la curva  $f(y,t)$  por una recta que une los puntos correspondientes a las coordenadas  $(t_k, f_k)$  y  $(t_{k+1}, f_{k+1})$ , como se muestra en la figura siguiente.



***Aproximación numérica de la integral.  
Método de la regla trapezoidal.***

El área que representa la aproximación numérica en este caso será igual a

$$\frac{(t_{k+1} - t_k)}{2} (f_{k+1} + f_k)$$

O bien

$$\frac{h}{2}(f_{k+1} + f_k)$$

De donde sustituimos en la ecuación (2) para obtener así el tercer método de donde resulta la fórmula recursiva del método trapecial

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(f_{k+1} + f_k) \quad (5).$$

Al igual que en el caso anterior, este método produce una fórmula recursiva implícita, por lo que es un método implícito, en general. Sin embargo en ambos casos, si la función  $f(y,t)$  es lineal, se podrán hacer las factorizaciones apropiadas para escribir la fórmula en forma explícita. Lo anterior no se podría efectuar en el caso de que la función mencionada fuera no lineal, en cuyo caso habría que diseñar un método iterativo para resolver el problema concreto por estos métodos implícitos.

## **ESTABILIDAD DE LA SOLUCION NUMERICA.**

### **Definiciones.**

La estabilidad es una de las propiedades más críticas de los métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales. En esta sección aprovechamos la introducción al tema, a través del desarrollo de las fórmulas recursivas presentadas, con el fin de discutir este complejo tema, de manera introductoria. El tema es complejo y existe literatura que lo trata de manera exclusiva.

Es posible que la solución numérica de una ecuación diferencial crezca sin límite, aún cuando la *solución exacta* (solución analítica, no conocida por lo general) permanezca acotada. Por supuesto también existirán casos en los que la solución exacta crezca indefinidamente.

En nuestro caso, nos limitaremos a la discusión de estabilidad de ecuaciones diferenciales para las cuales la solución exacta está acotada.

Comenzamos considerando la ecuación diferencial ordinaria (1) y un método numérico. En el análisis de estabilidad buscamos las condiciones y parámetros del método numérico para los cuales la solución numérica permanece acotada. El parámetro más importante es el paso de integración  $h$ .

Tenemos tres clases de métodos numéricos:

- Esquema numérico estable: Su solución numérica está acotada, es decir, no crece sin control con cualquier selección de los parámetros, principalmente del paso de integración  $h$ . Su robustez puede tener alto costo computacional.
- Esquema numérico inestable: Su solución numérica crece sin límite, sin importar el valor seleccionado de los parámetros. Estos esquemas carecen de utilidad, aún cuando fueran precisos.
- Esquema condicionalmente estable: La solución permanece acotada solamente con ciertos valores de parámetros.

### **Estabilidad de los métodos.**

La estabilidad de los métodos se estudia por medio de una ecuación diferencial especial, denominada *problema modelo*:

$$y' = \lambda y \quad (6)$$

Cuya solución exacta es

$$y = y(0)e^{\lambda t}, \text{ donde } \lambda \text{ puede ser real ó complejo.}$$

### **Euler explícito:**

La fórmula de este método,  $y_{k+1} = y_k + h f(y_k, t_k)$ , nos conduce a

$$x_1 = x_0 + h(\lambda x_0) = x_0(1 + \lambda h)$$

$$x_2 = x_1 + h(\lambda x_1) = x_1(1 + \lambda h) = x_0(1 + \lambda h)^2$$

- 
- 
- 

$$x_n = x_{n-1} + h(\lambda x_{n-1}) = x_{n-1}(1 + \lambda h) = x_0(1 + \lambda h)^n$$

A medida que crece  $n$  a  $\infty$ , un resultado finito para una ecuación diferencial estable ( $\Re\{\lambda\} < 0$ ) requiere

$$|1 + \lambda h| \leq 1 \quad (7).$$

La desigualdad anterior es la condición de estabilidad para el método de Euler implícito.

$\lambda$  puede ser compleja, aunque  $h$  sea real. Por lo que definimos

$$h\lambda = q = u + jv \quad (8).$$

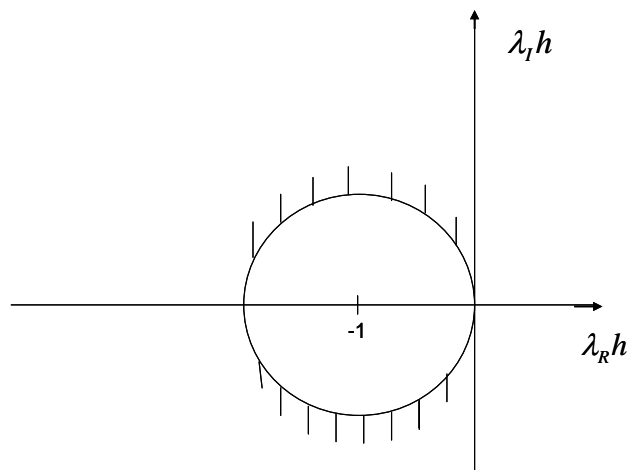
Sustituimos en (7) para obtener

$$|1 + u + jv| \leq 1$$

O bien

$$(1 + u)^2 + v^2 \leq 1 \quad (9).$$

El lugar geométrico de la expresión anterior es un círculo con centro en  $(-1,0)$  y radio unitario, el cual pasa por el origen. La región asociada con la (8) incluye el interior de dicho círculo.



*Diagrama de estabilidad para el método Euler explícito*

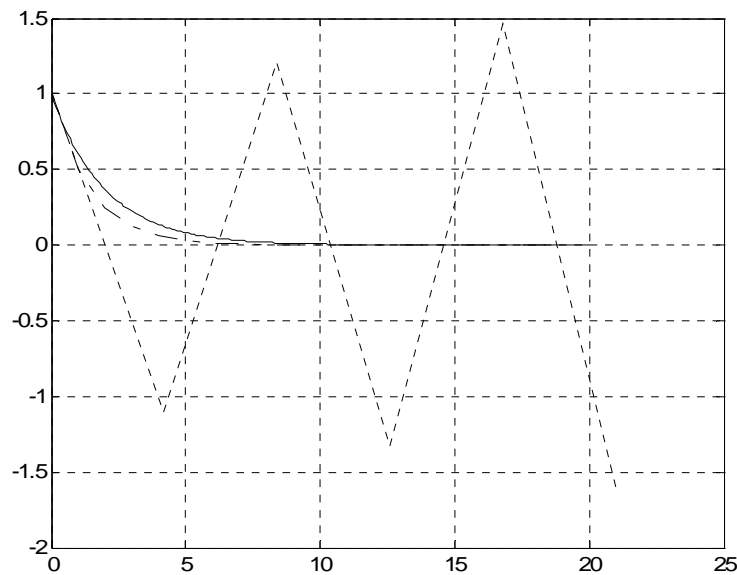
Lo anterior implica que si suponemos  $\Re\{\lambda\} < 0$  (solución estable), el valor de  $h$  debe ser tal que el producto  $q = \lambda h$  representa un punto dentro círculo.

Un ejemplo ilustrativo de anterior lo ilustra la solución numérica de la sencilla ecuación diferencial

$$y' + 0.5y = 0$$
$$y(0) = 1 \quad 0 \leq t \leq 20$$

Usamos dos valores del paso de integración. El primero  $h = 1$  y el segundo  $h = 4.2$ . De la ecuación (7) vemos que la desigualdad se cumple en el primer caso, es decir, para  $h = 1$ , mientras que para el segundo,  $h = 4.2$ , dicha desigualdad no se cumple.

La gráfica siguiente muestra los trazos correspondientes a la solución, en trazo continuo, el primer caso,  $h = 1$  en trazo con **-** (**estable**), y el segundo caso (**inestable**, oscilatorio y creciente) en línea punteada **- -**.



*Solución Numérica de la EDO por el método de Euler explícito.*

**Euler implícito:**

La fórmula recursiva del método es

$$y_{k+1} = y_k + h f(y_{k+1}, t_{k+1}).$$

Aplicamos esta fórmula recursiva a la ecuación (6) para obtener

$$y_1 = y_0 + h(\lambda y_1)$$

De donde obtenemos

$$y_1 = \frac{y_0}{1 - \lambda h} = \frac{y_0}{1 - q}$$

Si procedemos con el método en forma recursiva, en el paso  $n$ -ésimo tendremos

$$y_n = \left[ \frac{1}{1 - q} \right]^n y_0 \quad (10)$$

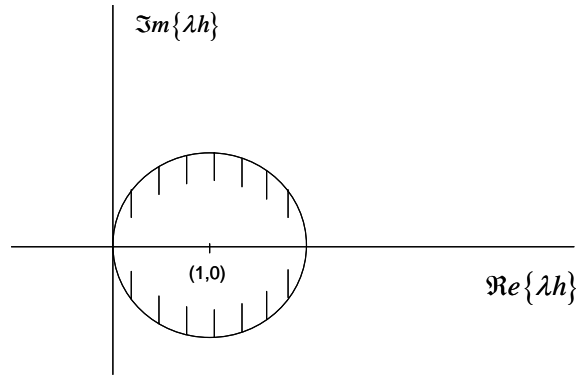
La condición asociada con un método estable requiere que a medida que  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\left| \frac{1}{1 - q} \right| \leq 1$$

Por lo que tendremos

$$1 \leq (1 - u)^2 + v^2 \quad (11).$$

La igualdad de la ecuación anterior representa un círculo con centro en (1,0) que pasa por el origen. La desigualdad de (11) se satisface fuera del círculo.



*Diagrama de estabilidad para el método Euler implícito.*

Lo anterior implica que el método es estable para todo valor de  $\lambda$  en el semiplano izquierdo. Si  $\lambda$  está en el semiplano derecho, el método muestra inestabilidad solamente en el caso de que  $\lambda$  esté dentro del círculo. Si  $\lambda$  se encuentra fuera del círculo unitario mencionado, la fórmula provee una secuencia convergente, aunque la respuesta real crece sin límite.

**Método Trapecial:**

La fórmula recursiva para este método es:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(f_{k+1} + f_k).$$

Aplicada a la ecuación modelo (6) obtenemos para el primer valor del proceso recursivo

$$y_1 = y_0 + \frac{2h}{2}(y_1 + y_0)$$

Por lo que

$$y_1 = y_0 \left( \begin{array}{c} 1 + \frac{\lambda h}{2} \\ \frac{2}{1 - \frac{\lambda h}{2}} \end{array} \right)$$

Para el paso  $n$ -ésimo obtendremos

$$y_n = \left( \frac{2+q}{2-q} \right)^n y_0$$

El requisito de estabilidad de este método para cuando  $n \rightarrow \infty$  es

$$\left| \frac{2+q}{2-q} \right| \leq 1$$

Lo cual conduce a la desigualdad siguiente

$$\left| \frac{2+u+jv}{2+u-jv} \right| \leq 1.$$

Simplificando lo anterior obtenemos finalmente

$$4u \leq 0$$

Lo anterior implica una región de estabilidad consistente en el semiplano izquierdo, cuya frontera es el eje imaginario. La fórmula será estable para cualquier valor de  $\lambda$  con  $\Re\{\lambda\} < 0$ .

El resultado de lo anterior implica que se obtendrán respuestas estables para funciones inestables. Lo anterior no implica un resultado correcto, solamente que cualquier error en el cálculo no crecerá en los pasos subsecuentes.